



TITLE:

# Intertwining operators の間の spectrum の関係について(作用素の不等式とその周辺)

AUTHOR(S):

Yoshino, Takashi

---

CITATION:

Yoshino, Takashi. Intertwining operators の間の spectrum の関係について(作用素の不等式とその周辺). 数理解析研究所講究録 1983, 500: 63-69

ISSUE DATE:

1983-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103667>

RIGHT:

# Intertwining operators の間の spectrum の関係について

東北大 教養 吉野 崇 (Takashi Yoshino)

$X$  及び  $Y$  を、2つの複素バナッハ空間とする。 $X$  から  $Y$  への有界線形作用素の全体を  $B(X, Y)$  で表わす。特に  $X = Y$  の場合は、 $B(X)$  で表わす。 $A \in B(X)$  及び  $B \in B(Y)$  に対して、 $C \in B(X, Y)$  が、 $CA = BC$  をみたす時、 $C$  intertwines  $A$  and  $B$  と云う。特に  $C$  が、injective で、dense range を持つようにとれる時は、 $A$  は、a quasi-affine transform of  $B$  であるとい、 $A \prec B$  で表わす。 $A \prec B$  且  $B \prec A$  である時は、 $A$  と  $B$  とは、quasi-similar であるとい。  $C$  が invertible にとれる時は、 $A$  と  $B$  とは、similar であるとい。 similar な作用素の間の spectrum の関係及び quasi-similar な作用素の間の spectrum の関係については、多くの研究結果が知られているが、ここでは、intertwining な作用素の間の spectral manifolds の関係を調べ、その応用として、spectrum の関係について、報告する。

## § 1. 準備

$A \in B(X)$  が a spectral operator であるとは、 $A$  と可換で、 $\sigma(A|E(\sigma)X) \subset \bar{\sigma}$  for all Borel sets  $\sigma$  なる性質を持つ a spectral measure  $E(\cdot)$  が存在する場合である。ここで、 $\sigma(T)$  は作用素  $T$  の spectrum を表わす。この spectral operators の概念は、Foias [3] によって、以下に述べる decomposable operators へと一般化される。 $A \in B(X)$  に対して、

$$\sigma_p^0(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C}; (z-A)f(z) \equiv 0 \text{ for some non-zero analytic}$$

function  $f: D_r(\lambda) \rightarrow X \}$  とする。但し、

$$D_r(\lambda) = \{ z \in \mathbb{C}; |z - \lambda| < r \}$$

である。 $\sigma_p^0(A) = \emptyset$  なる場合に、 $A$  は、the single-valued extension property を持つと云う。 $A \in B(X)$  及び、a closed set  $\sigma \subset \mathbb{C}$  に対して、

$$X_A(\sigma) = \{ x \in X; (z-A)f(z) \equiv x \text{ for some analytic}$$

function  $f: \mathbb{C} \setminus \sigma \rightarrow X \}$  とし、任意の  $\sigma \subset \mathbb{C}$  に

対しては、 $X_A(\sigma) = \bigcup \{ X_A(\tau); \tau \subset \sigma \text{ and } \tau \text{ is closed} \}$  とする。集合

$X_A(\sigma)$  は the spectral manifold of  $A$  と云う。 $X_A(\sigma)$  が  $A$  の an invari-

ant linear manifold になることや、 $\sigma_1 \subset \sigma_2$  ならば、 $X_A(\sigma_1)$

$\subset X_A(\sigma_2)$  なることが知られてゐる。又、 $X_A(\sigma) = X_A(\sigma \cap \sigma(A))$ ,

$X_A(\sigma(A)) = X$  及び  $X_A(\emptyset) = \{0\}$  なることも容易にわかる。

Proposition. ([9]) If  $X_A(\sigma)$  is closed, then

$$\sigma(A|X_A(\sigma)) \subset \sigma \cup \overline{\sigma_p^0(A)}.$$

$A \in B(X)$  が "Dunford's closure condition" をみたすとは、任意の closed set  $\sigma \subset \mathbb{C}$  に對して、 $X_A(\sigma)$  が closed なる時である。この時には、 $A$  は、the single-valued extension property を持つことが知られている。 $A \in B(X)$  の不変部分空間  $Z$  が、a spectral maximal space であるとは、 $A$  の、 $\sigma(A|Z') \subset \sigma(A|Z)$  なる任意の不変部分空間  $Z'$  に對して、 $Z' \subset Z$  なる時である。 $A \in B(X)$  が decomposable であるとは、 $\sigma(A)$  の任意の open covering  $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$  に對して、 $A$  の spectral maximal spaces の系  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$  が存在して、 $X = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$  且  $\sigma(A|Z_j) \subset G_j$  for every  $j = 1, 2, \dots, n$  なる時である。

## § 2. 主な結果.

Lemma. If  $C \in B(X, Y)$  intertwines  $A \in B(X)$  and  $B \in B(Y)$ , then  $CX_A(\sigma) \subset X_B(\sigma)$  for an arbitrary set  $\sigma \subset \mathbb{C}$ . In particular  $CX \subset X_B(\sigma(A))$ .

Proof. If  $x \in X_A(\sigma)$ , then  $x \in X_A(\tau)$  for some closed set  $\tau \subset \sigma$  and  $(z-A)f(z) \equiv x$  for some analytic function  $f: \mathbb{C} \setminus \tau \rightarrow X$ . Since  $Cx \equiv C(z-A)f(z) = (z-B)Cf(z)$  and since  $Cf(z): \mathbb{C} \setminus \tau \rightarrow Y$  is analytic,  $Cx \in X_B(\tau) \subset X_B(\sigma)$  and hence  $CX_A(\sigma) \subset X_B(\sigma)$ . And the rest follows by  $X_A(\sigma(A)) = X$ .

Theorem 1. (Radjavi-Rosenthal [5]) If  $C \in B(X, Y)$  intertwines spectral operators  $A \in B(X)$  and  $B \in B(Y)$  with spectral measures  $E(\cdot)$  and  $F(\cdot)$  respectively, then  $C$  intertwines  $E(\sigma)$  and  $F(\sigma)$  for every Borel set  $\sigma$ .

Proof. Since  $X_A(\sigma) = E(\sigma)X$  and  $X_B(\sigma) = F(\sigma)Y$  for every closed set  $\sigma \subset \mathbb{C}$  by [1; Theorem 4],  $CE(\sigma)X \subset F(\sigma)Y$  by Lemma and hence  $F(\sigma)CE(\sigma) = CE(\sigma)$  and  $F(\mathbb{C} \setminus \sigma)CE(\sigma) = 0$  because  $F(\sigma)CE(\sigma)x = CE(\sigma)x$  for all  $x \in X$  and  $F(\mathbb{C} \setminus \sigma)CE(\sigma)X \subset F(\mathbb{C} \setminus \sigma)F(\sigma)Y = F([\mathbb{C} \setminus \sigma] \cap \sigma)Y = F(\emptyset)Y = \{0\}$ . By regularity of  $E(\cdot)$  and  $F(\cdot)$ ,  $F(\sigma)CE(\sigma) = CE(\sigma)$  and  $F(\mathbb{C} \setminus \sigma)CE(\sigma) = 0$  for every Borel set  $\sigma$ . And hence  $F(\sigma)C = F(\sigma)C[E(\sigma) + E(\mathbb{C} \setminus \sigma)]$   
 $= F(\sigma)CE(\sigma) + F(\sigma)CE(\mathbb{C} \setminus \sigma) = F(\sigma)CE(\sigma) = CE(\sigma)$ .

Theorem 2. (Rosenblum [6]) If  $C \in B(X, Y)$  intertwines  $A \in B(X)$  and  $B \in B(Y)$  and if  $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$ , then  $C = 0$ .

Proof. Since  $CX \subset X_B(\sigma(A)) = X_B(\sigma(A) \cap \sigma(B)) = X_B(\emptyset) = \{0\}$  by Lemma,  $CX = \{0\}$  and hence  $C = 0$ .

Theorem 3. (Fong [4], Stampfli [7], Williams [8]) If  $C \in B(X, Y)$  intertwines  $A \in B(X)$  and  $B \in B(Y)$  and has dense range

and if  $B$  satisfies the Dunford's closure condition, then  $\sigma(B) \subset \sigma(A)$ .

Proof. Since  $\sigma_p^o(B) = \emptyset$  and since  $X_B(\sigma(A))$  is closed by the assumption,  $Y = \overline{CX} \subset X_B(\sigma(A)) \subset Y$  by Lemma and hence  $Y = X_B(\sigma(A))$ . Therefore  $\sigma(B) = \sigma(B|Y) = \sigma(B|X_B(\sigma(A))) \subset \sigma(A) \cup \overline{\sigma_p^o(B)} = \sigma(A)$  by Proposition.

Theorem 4. (Fialkow [2]) If  $C \in B(X, Y)$  intertwines  $A \in B(X)$  and  $B \in B(Y)$  and is injective and if  $A$  is decomposable, then  $\sigma(A) \subset \sigma(B)$ .

Proof. If  $\lambda \notin \sigma(B)$ , then there exists an open ball  $D_r(\lambda)$  such that  $D_r(\lambda) \cap \sigma(B) = \emptyset$ , and then  $CX_A(D_r(\lambda)) \subset X_B(D_r(\lambda)) = X_B(D_r(\lambda) \cap \sigma(B)) = X_B(\emptyset) = \{0\}$  by Lemma and hence  $X_A(D_r(\lambda)) = X_A(D_r(\lambda) \cap \sigma(A)) = \{0\}$  because  $C$  is injective. If  $D_r(\lambda) \cap \sigma(A) \neq \emptyset$ , then there exists  $r'$  such that  $0 < r' < r$  and  $D_{r'}(\lambda) \cap \sigma(A) \neq \emptyset$ . Since  $D_r(\lambda)$  and  $\mathbb{C} \setminus \overline{D_{r'}(\lambda)}$  are open covering of  $\sigma(A)$  and since  $A$  is decomposable by the assumption,  $A$  satisfies the Dunford's closure condition and  $X = X_A(D_r(\lambda)) + X_A(\mathbb{C} \setminus \overline{D_{r'}(\lambda)}) \subset X_A(D_r(\lambda)) + X_A(\mathbb{C} \setminus D_{r'}(\lambda)) \subset X$  (see [9]). And since  $\sigma(A|X_A(\mathbb{C} \setminus D_{r'}(\lambda))) \subset [\mathbb{C} \setminus D_{r'}(\lambda)] \cap \sigma(A) = \sigma(A) \setminus D_{r'}(\lambda) \subsetneq \sigma(A)$  by Proposition,

$X_A(\mathbb{C} \setminus D_F(\lambda)) \neq X$  and hence  $X_A(D_F(\lambda)) \neq \{0\}$ . This contradicts with  $X_A(D_F(\lambda)) = \{0\}$ . Therefore  $D_F(\lambda) \cap \sigma(A) = \emptyset$  and  $\lambda \notin \sigma(A)$ .

Remark. In the above proof, the decomposability of  $A$  is only used to show that  $X_A(\sigma) = \{0\}$  implies  $\sigma \cap \sigma(A) = \emptyset$ . If  $C \in B(X, Y)$  intertwines  $A \in B(X)$  and  $B \in B(Y)$  and is injective, then  $\sigma_p(A) \subset \sigma_p(B)$  and  $\sigma_p^\circ(A) \subset \sigma_p^\circ(B)$ , where  $\sigma_p(A)$  denotes the point spectrum of  $A$ . Because if  $\lambda \notin \sigma_p(B)$  and if  $(\lambda - A)x = 0$ , then  $0 = C(\lambda - A)x = (\lambda - B)Cx$  and  $Cx = 0$  and hence  $x = 0$  because  $C$  is injective. Therefore  $\lambda \notin \sigma_p(A)$ . If  $\lambda \notin \sigma_p^\circ(B)$  and if  $(z - A)f(z) \equiv 0$  for some analytic function  $f: D_F(\lambda) \rightarrow X$ , then  $0 \equiv C(z - A)f(z) = (z - B)Cf(z)$  and  $Cf(z); D_F(\lambda) \rightarrow Y$  is analytic. Hence  $Cf(z) = 0$  by the assumption and  $f(z) = 0$  because  $C$  is injective. Therefore  $\lambda \notin \sigma_p^\circ(A)$ .

### 参考文献

- [1] N. Dunford, Spectral operators,  
Pacific J. Math., 4(1954) 321-354.
- [2] L. A. Fialkow, A note on quasi-similarity of operators,  
Acta Sci. Math., 39(1977) 67-85.
- [3] C. Foiaş, Spectral maximal spaces and decomposable operators

in Banach space,

Arch. Math., 14 (1963) 341-349.

[4] C.-K. Fong, Quasi-affine transforms of subnormal operators,

Pacific J. Math., 70 (1977) 361-368.

[5] H. Radjavi and P. Rosenthal, Hyper-invariant subspaces for

spectral and  $n$ -normal operators,

Acta Sci. Math., 32 (1971) 121-126.

[6] M. Rosenblum, On the operator equation  $BX - XA = Q$ ,

Duke Math. J., 23 (1956) 263-269.

[7] J. G. Stampfli, Quasi-similarity of operators,

Proc. R. Ir. Acad., 81A (1981) 109-119.

[8] L. R. Williams, Quasi-similarity and hyponormal operators,

J. Operator Theory, 5 (1981) 127-139.

[9] T. Yoshino, Some properties of the spectral manifolds,

(to appear).